

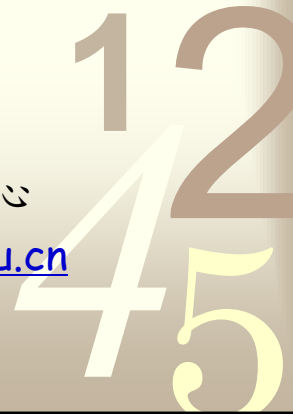
数论概论

0011

张志强

智能信息处理研究中心

<http://rciip.hrbeu.edu.cn>



教师信息

0011

- Zhiqiang Zhang (张志强)
Research Center Of Intelligent Information Processing
<http://rciip.hrbeu.edu.cn>
Office: 21B 473
E-mail: zqzhang@tsinghua.edu.cn
zqzhang@hrbeu.edu.cn
Tel: 82519406
13945068472



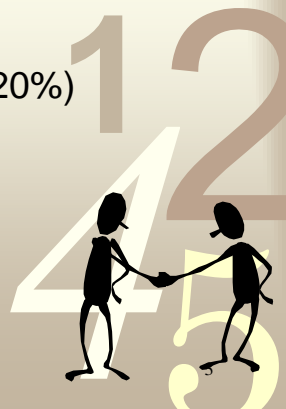
智能信息处理研究中心

2

课程信息

- 课程编号: 0906043
- 课程中文名称: 初等数论基础
- 课程英文名称: NUMBER THEORY
- 课程性质: 通识教育选修课
- 考核方式: 考查(考试80%, 平时20%)
- 开课专业: 全校本科生
- 开课学期: 1
- 总学时: 24 (其中理论24学时)
- 总学分: 1

智能信息处理研究中心



课程基本内容

1~2	高次幂之和与费马大定理	授课
3~4	整除性与最大公因数	授课
5~6	因数分解与算术基本定理	授课
7~10	同余式、幂与费马小定理	授课
11~12	欧拉函数与中国剩余定理	授课
13~14	素数计数	授课
15~16	欧拉 ϕ 函数与因数和	授课
17~18	模 p 平方剩余	授课
19~20	丢番图逼近与佩尔方程	授课
21~22	高斯整数与唯一因子分解	授课
23~24	连分数、平方根与佩尔方程	授课

智能信息处理研究中心

4

教材/参考书

0011

- 教材

- 《数论概论》，孙志伟 吴克俭等译，机械工业出版社，2008
- 原著：A Friendly Introduction to Number Theory, Joseph H. Silverman

- 参考书

- 《初等数论》（第三版），闵嗣鹤 严士健编，高等教育出版社，2003.
- 《素数的音乐》【英】马科斯.杜.索托伊著，孙维昆译，湖南科学技术出版社，2007

智能信息处理研究中心

5

第0章 什么是数论？

0011

0011

数论是数学中的一个分支，初等数论的大部份内容早在古希腊欧几里德的《几何原本》中就已出现。欧几里德证明了素数有无穷多个，他还给出求两个自然数的最大公约数的方法，即所谓欧几里得算法。我国古代在数论方面亦有杰出之贡献，现在一般数论书中的“中国剩余定理”正是我国古代《孙子算经》中的下卷第26题，我国称之为“孙子定理”。

数学是科学之王，
数论是数学之王。

——高斯



Gauss

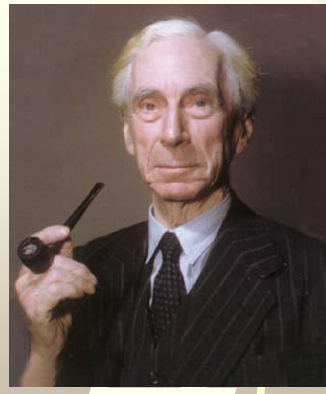
7

智能信息处理研究中心

数学之美

0011

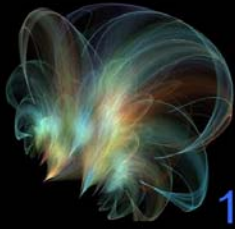
数学不仅揭示真理，也给人极度的美感——如同雕塑般的冷艳与严肃，这种美不需要利用人性的弱点，也不需要绘画或音乐那样华丽的包装，它是极其纯洁的，就完整性而言只有最伟大的艺术才能与之相比。
——罗素(Russel), 1902



Bertrand Russell
1872-1970

8

智能信息处理研究中心



$$\begin{aligned}1 \times 8 + 1 &= 9 \\12 \times 8 + 2 &= 98 \\123 \times 8 + 3 &= 987 \\1234 \times 8 + 4 &= 9876 \\12345 \times 8 + 5 &= 98765 \\123456 \times 8 + 6 &= 987654 \\1234567 \times 8 + 7 &= 9876543 \\12345678 \times 8 + 8 &= 98765432 \\123456789 \times 8 + 9 &= 987654321\end{aligned}$$

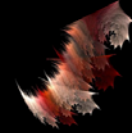


$$\begin{aligned}1 \times 9 + 2 &= 11 \\12 \times 9 + 3 &= 111 \\123 \times 9 + 4 &= 1111 \\1234 \times 9 + 5 &= 11111 \\12345 \times 9 + 6 &= 111111 \\123456 \times 9 + 7 &= 1111111 \\1234567 \times 9 + 8 &= 11111111 \\12345678 \times 9 + 9 &= 111111111 \\123456789 \times 9 + 10 &= 1111111111\end{aligned}$$



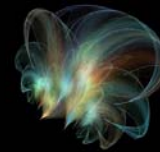
$$\begin{aligned}9 \times 9 + 7 &= 88 \\98 \times 9 + 6 &= 888 \\987 \times 9 + 5 &= 8888 \\9876 \times 9 + 4 &= 88888 \\98765 \times 9 + 3 &= 888888 \\987654 \times 9 + 2 &= 8888888 \\9876543 \times 9 + 1 &= 88888888 \\98765432 \times 9 + 0 &= 888888888\end{aligned}$$

很炫，是不是？



再看看這個對稱式

$$\begin{aligned}1 \times 1 &= 1 \\11 \times 11 &= 121 \\111 \times 111 &= 12321 \\1111 \times 1111 &= 1234321 \\11111 \times 11111 &= 123454321 \\111111 \times 111111 &= 12345654321 \\1111111 \times 1111111 &= 1234567654321 \\11111111 \times 11111111 &= \\&\mathbf{123456787654321} \\111111111 \times 111111111 &= \\&\mathbf{12345678987654321}\end{aligned}$$



研究对象

- 数论研究正整数集合：1,2,3,4,5,6,7,.....
 - 奇数：1,3,5,7,9,.....
 - 偶数：2,4,6,8,10,.....
 - 平方数：1,4,9,16,25,36,.....
 - 立方数：1,8,27,64,125,.....
 - 素数：2,3,5,7,11,13,17,19,23,.....
 - 与1同余的数 (mod 4)：1,5,9,13,17,21,.....
 - 三角数：1,3,6,10,15,21,28,
 - 完全数：6,28,496,.....
 - 斐波那契数：1,1,2,3,5,8,13,21,34,.....
 -

智能信息处理研究中心

13

几个典型的数论问题

- 平方和
 - 两个平方数之和可能等于平方数吗？
 - Yes, $3^2+4^2=5^2$, $5^2+12^2=13^2$
- 高幂次和
 - 两个立方数之和等于立方数吗？两个4次方之和是4次方吗？
 - 一般的，两个n次方之和是n次方吗？
 - No
 - 费马大定理，17世纪提出，1994年才由Andrew Wiles完全解决

智能信息处理研究中心

14

几个典型的数论问题

0011

• 素数无穷

- 素数是一个整数 $p > 1$ ，它仅有因数1与 p
- 存在无穷多个素数吗？
- 存在无穷多个除4余1的素数吗？
- 存在无穷多个除4余3的素数吗？

- Yes, 狄利克雷于1837年证明

智能信息处理研究中心

15

几个典型的数论问题

0011

• 数的形状

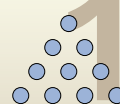
- 平方数是可以排列成正方形的数，如1,4,9等
- 三角数是可以排列成三角形的数，如1,3,6等



$$1+2=3$$



$$1+2+3=6$$



$$1+2+3+4=10$$



$$2^2=4$$



$$3^2=9$$



$$4^2=16$$

智能信息处理研究中心

16

几个典型的数论问题

0011

• 数的形状(续)

- 是否存在也是平方数的三角数?
- Yes, e.g. $36=6^2=1+2+3+4+5+6+7+8$
- 这种数是无穷多个吗?
- Thinking!.....

智能信息处理研究中心

17

几个典型的数论问题

0011

• 孪生素数

- 在素数中有时会出现相邻奇数都是素数的情形, 如下表为小于100的素数表

3,5,7, 11,13, 17,19, 23, 29,31, 37,

41,43, 47,53, 59,61, 67, 71,73,

79,83,89,97

- 这样的孪生素数有无穷多个吗?

智能信息处理研究中心

18

几个典型的数论问题

0011 • 形如 N^2+1 的素数

— 如果取 $N=1,2,3,\dots$ ，得到的数中，有些是素数，如

$$\begin{aligned} 2^2+1=5, & \quad 4^2+1=17, & \quad 6^2+1=37, \\ 8^2+1=65, & \quad 10^2+1=101, & \quad 12^2+1=145, \\ 14^2+1=197, & \quad 16^2+1=257, & \quad 18^2+1=325, \\ 20^2+1=401 \end{aligned}$$

— 是否存在无穷多个形如 N^2+1 的素数?

思考题

0011 • 请给出除1和36之外的另一个既是平方数又是三角数的数。

• 试着将前几个奇数加起来，观察得到的数是否满足某些模式，请将其表示成公式，并给出公式成立的几何证明。