第一章 高次幂之和与费马大定理

张志强
智能信息处理研究中心
http://rciip.hrbeu.edu.cn

勾股数组

- 毕达哥拉斯定理（勾股定理）：一个直角三角形的两条直角边的平方和等于斜边的平方

$$a^2+b^2=c^2$$

- 满足上式的三角形还有哪些（边长均取自然数）？

$3^2+4^2=5^2$, $5^2+12^2=13^2$

$8^2+15^2=17^2$, $28^2+45^2=53^2$

……

毕达哥拉斯三元组

- 巴比伦人制作的表格中有很大的三元组，这表明他们具有得到这种三元组的系统方法

用带结绳子制作直角三角形

提出一个研究问题

- 问题：是否存在无穷多个勾股数组？即满足方程$a^2+b^2=c^2$的自然数三元组？
  - Yes
  - 如果(a,b,c)是解的话，那么(da,db,dc)也是解，其中d为任意一个自然数，因为

$$(da)^2+(db)^2=d^2(a^2+b^2)=d^2c^2=(dc)^2$$

Meaningless answer!

本原勾股数组

0011

- 所谓本原勾股数组就是一个三元组(a,b,c)，其中a,b,c没有公因数(1除外)，且满足

$$a^2+b^2=c^2$$

- 尝试着找找
  - (3,4,5), (5,12,13), (8,15,17), (7,24,25)
  - (20,21,29), (9,40,41), (12,35,37), (11,60,61)
  - (28,45,53), (33,56,65), (16,63,65), ……

Please observe above data, can you propose some guesses?

1st Guess

0011

- 猜想1：a与b奇偶性不同，且c总是奇数
  - Yes or No?
- Try to prove it!
  - 基本思路
    - 假设a,b同性，则有2种情况：都是偶数，都是奇数，无论哪种情况均推出矛盾结论
    - 因此猜想得到证明

一个愿望

0011

- 我们是否能得到一个可以给出所有勾股三元组的通用公式?

智能信息处理研究中心 7

2^{nd} Guess

0011

- 考虑a,b的互换性，原问题转化为求解如下方程的所有自然数解
  - $a^2+b^2=c^2$，a是奇数，b是偶数，a,b,c没有公因数
- 观察：如果(a,b,c)是本原三元组，则有

$$a^2=c^2-b^2=(c-b)(c+b)$$

- 一些实例

$3^2 = 5^2 - 4^2 = (5-4)(5+4) = 1*9$

$15^2 = 17^2 - 8^2 = (17-8)(17+8) = 9*25$

$35^2 = 37^2 - 12^2 = (37-12)(37+12) = 25*49$

$33^2 = 65^2 - 56^2 = (65-56)(65+56) = 9*121$

$21^2 = 29^2 - 20^2 = (29-20)(29+20) = 9*49$

…….

- 猜想2：(c+b)和(c-b)都是平方数吗?

智能信息处理研究中心 8

3rd Guess

0011

- 猜想3：(c+b)和(c-b)没有公因数
- 证明：
  - 假设(c+b)和(c-b)有一个公因数d，即d整除(c+b)和(c-b)，则d也整除

    (c+b)+(c-b)=2c，(c+b)-(c-b)=2b
  - 因此，d整除2c和2b，因为b和c没有公因数，所以d必等于1或2。
  - 由于d也整除a^2且a是奇数，所以d一定是1
  - 最后结论得证

最后一步

0011

- 由于(c+b)与(c-b)没有公因数，且(c+b)(c-b)=a^2，(c+b)与(c-b)的积是平方数，这种情况下只有在(c+b)和(c-b)自身都是平方数的情况下才出现，记

  $c+b=s^2$，$c-b=t^2$
- 其中s>t>=1是没有公因数的奇数，则有

$$c=\frac{s^2+t^2}{2} \qquad b=\frac{s^2-t^2}{2}$$

勾股数组定理

0011

- 定理：每个本原勾股数组(a,b,c)（其中a为奇数，b为偶数）都可以从如下公式得出：

$$a = st \qquad b = \frac{s^2 - t^2}{2} \qquad c = \frac{s^2 + t^2}{2}$$

- 其中s>t>=1是任意没有公因数的奇数

费马大定理

0011

- n>=3时方程$a^n+b^n=c^n$没有正整数解
- 1665年费马病逝后，为了攻克费马大定理，许多数学家为之花费了大量的时间，甚至献出了毕生的精力。

费马大定理

0011

- 1779年，瑞士数学家欧拉（Euler，1707—1783）证明了n=3，4时的费马大定理。
- 1823年，法国数学家勒让德（A.M. Legenden，1752—1833）证明了n=5时的费马大定理。
- 1831年，法国女数学家索菲娅·热尔曼（S.Germain）在假定x，y，z与n互质，当n<100的所有素数时，费马大定理成立。

费马大定理

0011

- 1839年，法国数学家拉梅（Lame1, 1795—1870）证明了n=7时的费马大定理。
- 1849年，德国数学家库麦尔（E.E.Kummer）创立了"理想数论"，证明了当n为超过100（除37,59和67）的所有奇素数时，费马大定理成立。
- 1850—1853年，数学家们将n推进到216。
- 1901年德国数学家林德曼（F.Lindemann）发表了一篇17页的论文，夸口解决了费马大定理，后被推翻。

1907年，他又发表了一篇63页的所谓解决费马大定理论文，但不久又被推翻

费马大定理

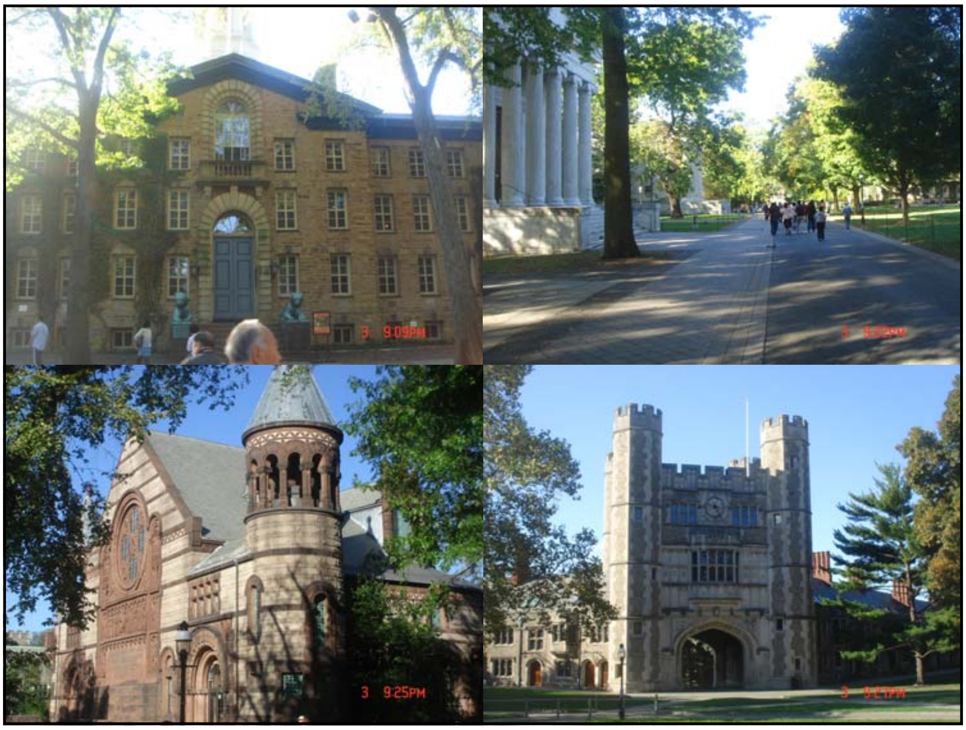
- 1938年，德国数学家勒贝格（H.L.Lebesgus，1875—1941）向法国科学院呈上证明费马大定理的论文，也被否定了。
- 1987年，美国加州大学的罗瑟教授借助计算机将n的上限推进到4100万。
- 1955年，日本数学家谷山、韦伊、志村三人猜想：有理数域上所有椭圆曲线都是模曲线。80年代中期，德国数学家弗雷（G.Frey）证明了：如果此猜想成立，则可推出费马大定理，至此费马大定理的证明方向有了转移。

费马大定理

- 最后，1994年美国普林斯顿大学怀尔斯发表了每条半稳定椭圆曲线可模型化的证明，从而完成了已有350多年的费马断言。

“在学校里我喜欢做题目，我把它们带回家，编写成我自己的新题目。不过我以前找到的最好的题目是在我们社区的图书馆里发现的。”

——安德鲁·怀尔斯



作业

- 请为安德鲁·怀尔斯写2页的传记（2000～3000字左右）。要求叙述其数学成就，解决费马定理过程中的细节，以及你们自己的感受。