第九章 丢番图逼近与佩尔方程

张志强

智能信息处理研究中心

http://rciip.hrbeu.edu.cn

佩尔方程

0011
- 佩尔方程是指具有形式$x^2-Dy^2=1$的方程，其中D是一个固定的正整数并且不是完全平方数
- 历史

太阳神有一牛群，由白、黑、花、棕四种颜色的公、母牛组成。在公牛中，白牛数多于棕牛数，多出之数相当于黑牛数的1/2+1/3；黑牛数多于棕牛，多出之数相当于花牛数的1/4+1/5；花牛数多于棕牛数，多出之数相当于白牛数的1/6+1/7。在母牛中，白牛数是全体黑牛数的1/3+1/4；黑牛数是全体花牛数1/4+1/5；花牛数是全体棕牛数的1/5+1/6；棕牛数是全体白牛数的1/6+1/7。问这牛群是怎样组成的？

  - （$W+X$）为一个正方形（数），（$Y+Z$）为一个三角数
  - 求各种颜色牛的数目。

$$x^2-4729494y^2=1$$

佩尔方程

0011

- 公元628年在印度出现了第一个有意义的进展，婆罗摩笈多描述了如何利用佩尔方程的已知解去得到新的解。
- 公元1150年，婆什伽罗给出了一个方法求解初始解
- 1657年费马提出了求解方程$x^2-61y^2=1$的问题，最小解(1766319049,226153980)
- 1657年布朗克尔给出了一种求解佩尔方程的一般方法

佩尔方程

- 定理(佩尔方程定理)：设D是一个正整数且不是完全平方数，则佩尔方程$x^2-Dy^2=1$总有正整数解。如果(x_1,y_1)是使x_1最小的解，则每个解(x_k,y_k)可通过取幂得到

$$x_k + y_k\sqrt{D} = \left(x_1 + y_1\sqrt{D}\right)^k, \qquad k = 1,2,3,\ldots$$

- 例如，佩尔方程$x^2-47y^2=1$的最小解为$(x,y)=(48,7)$，那么通过对$48+7\sqrt{47}$取幂得到第二小和第三小的解分别是

$$\left(48 + 7\sqrt{47}\right)^2 = 4607 + 672\sqrt{47}$$

$$\left(48 + 7\sqrt{47}\right)^3 = 442224 + 64505\sqrt{47}$$

丢番图逼近

0011

- 如何求解佩尔方程$x^2-Dy^2=1$的一个正整数解(x,y)？
  - 因式分解 $\left(x-y\sqrt{D}\right)\left(x+y\sqrt{D}\right)=1$
  - 这实际上是将1表示成2个数的乘积，其中一个相当大，另一个相当小，尤其是x和y都很大的时候

$$\left(x-y\sqrt{D}\right)=\frac{1}{\left(x+y\sqrt{D}\right)}$$

  - 如果能找到整数x,y使得$\left(x-y\sqrt{D}\right)$非常小，则可以期望x,y是佩尔方程的一个解

丢番图逼近

0011

- 从最简单的答案开始，对任意正整数y，如果x是最接近 $y\sqrt{D}$ 的整数，那么差

$$|x-y\sqrt{D}|\text{至多是}1/2$$

- 是否还能做得更好？

x	y	$\|x-y\sqrt{13}\|$	x^2-13y^2	x	y	$\|x-y\sqrt{13}\|$	x^2-13y^2
4	1	0.394449	3.000	32	9	0.449961	-29.000
7	2	0.211103	-3.000	36	10	0.055513	-4.000
11	3	0.183346	4.000	40	11	0.338936	27.000
14	4	0.422205	-12.000	43	12	0.266615	-23.000
18	5	0.027756	-1.000	47	13	0.127833	12.000
22	6	0.366692	16.000	50	14	0.477718	-48.000
25	7	0.238859	-12.000	54	15	0.083269	-9.000
29	8	0.155590	9.000	58	16	0.311180	36.000

丢番图逼近

- 我们可以观察到$|x-y\sqrt{13}|$总是小于1/2，有时接近1/2，如y=19，x=69
- 但是有的时候$|x-y\sqrt{13}|$又非常小，如小于0.05，
  - 如(x,y)=(18,5)，$|x-y\sqrt{13}|$=0.027756
- 如果将表延伸到y=200，我们发现下面所有的数对满足$|x-y\sqrt{13}|$<0.05

丢番图逼近

- (18,5),
- (101,28),
- (119,33),
- (137,38),
- (155,43),
- (238,66),
- (256,71),
- (274,76),
- (292,81),
- (375,104),
- (393,109),
- (411,114),
- (494,137),
- (512,142),
- (530,147),
- (548,152),
- (631,175),
- (649,180),
- (667,185)

猜想：对于一个佩尔方程，是否存在使绝对值小于任意给定小数的解？

鸽笼原理

0011

- 原理基本含义
  - 如果鸽子比鸽笼多，那么至少有一只笼子里面有2只以上的鸽子！
  - 有时也叫抽屉原理
- 我们的目标是寻找两个不同的倍数 $y_1\sqrt{D}$ 和 $y_2\sqrt{D}$，使得它们的差非常接近一个整数，选择某个大数Y并考虑如下所有的倍数 $0\sqrt{D}\quad 1\sqrt{D}\quad 2\sqrt{D}\quad 3\sqrt{D}\ \cdots\cdots\ y\sqrt{D}$

鸽笼原理

0011

- 将每一个倍数写成一个整数与一个介于0和1之间的小数之和

$0\sqrt{D} = N_0 + F_0$,其中N_0=0，F_0=0

$1\sqrt{D} = N_1 + F_1$,其中N_1是整数，0≤F_1<1

$2\sqrt{D} = N_2 + F_2$,其中N_2是整数，0≤F_2<1

……

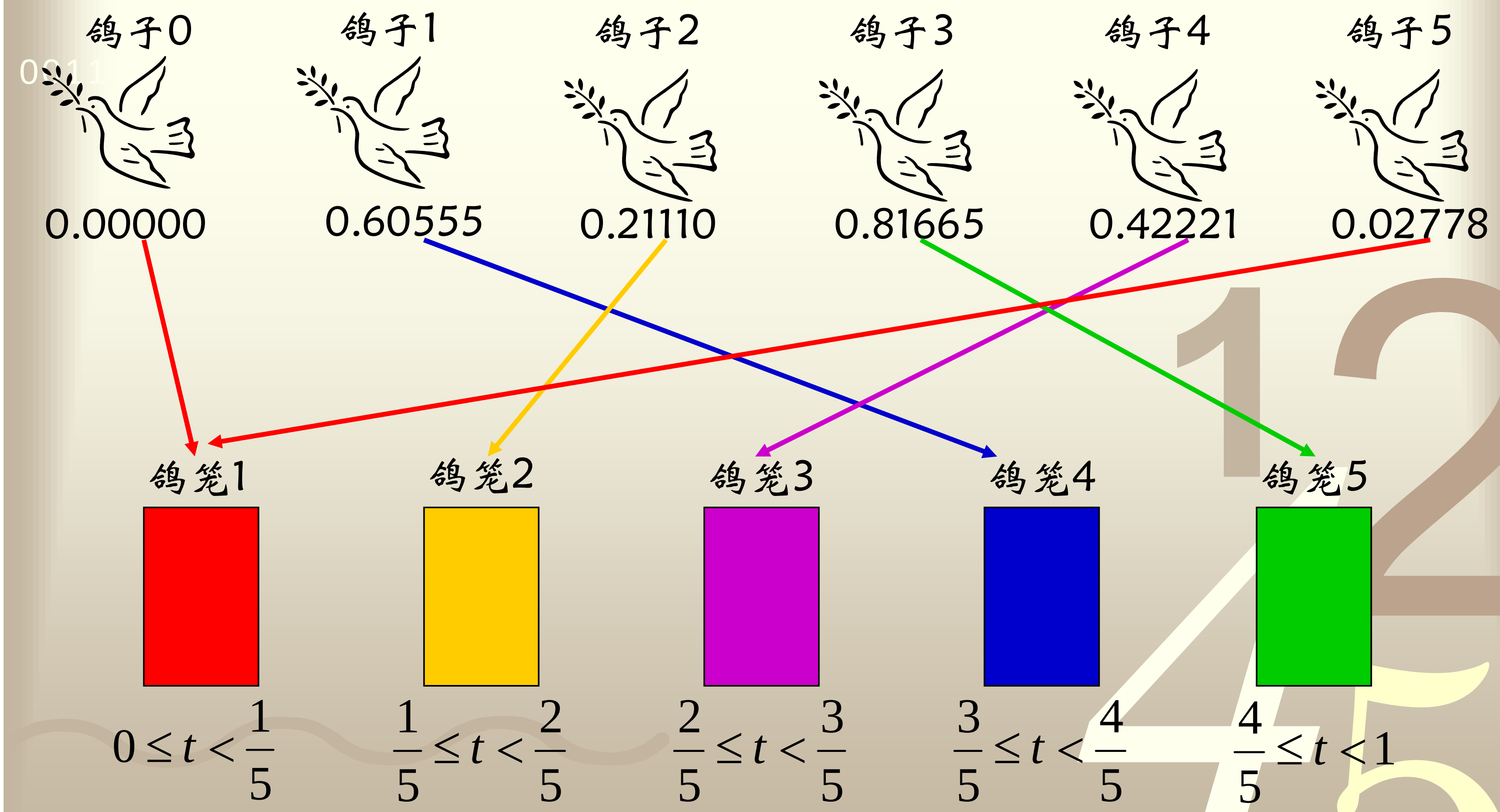
$y\sqrt{D} = N_Y + F_Y$,其中N_Y是整数，0≤F_Y<1

鸽笼原理

0011

- 鸽子：Y+1个数$F_0,F_1,F_2,\ldots,F_Y$，所有的鸽子都在0到1之间，$0 \leqslant t < 1$
- 笼子：我们把这个区间分成Y个鸽笼，
  - 鸽笼1：$0/Y \leqslant t < 1/Y$
  - 鸽笼2：$1/Y \leqslant t < 2/Y$
  - 鸽笼3：$2/Y \leqslant t < 3/Y$
  - ……
  - 鸽笼Y：$(Y-1)/Y \leqslant t < Y/Y$

鸽笼原理


鸽子0
鸽子1
鸽子2
鸽子3
鸽子4
鸽子5
0.00000
0.60555
0.21110
0.81665
0.42221
0.02778
鸽笼1
鸽笼2
鸽笼3
鸽笼4
鸽笼5
$0 \le t < \frac{1}{5}$
$\frac{1}{5} \le t < \frac{2}{5}$
$\frac{2}{5} \le t < \frac{3}{5}$
$\frac{3}{5} \le t < \frac{4}{5}$
$\frac{4}{5} \le t < 1$

鸽笼原理

0011

- 假设F_m和F_n栖息在同一个笼子里，m<n，鸽笼的长度仅为1/Y，所以F_m和F_n之间的距离小于1/Y，即 $|F_m-F_n|<1/Y$

另外有， $m\sqrt{D}=N_m+F_m \quad n\sqrt{D}=N_n+F_n$

则有 $$\left|\left(m\sqrt{D}-N_m\right)-\left(n\sqrt{D}-N_n\right)\right|<1/Y$$

$$\left|\left(N_n-N_m\right)-\left(n-m\right)\sqrt{D}\right|<1/Y$$

记$x=N_n-N_m$, $y=n-m$，则 $|x-y\sqrt{D}|<1/Y$

鸽笼原理

0011

- 最后，我们估计y=n-m的大小，m和n的选取使得F_m和F_n鸽子在同一个鸽笼中，特别的m和n介于0和Y之间，由于n>m，有0<m<n≤Y，可知0<y≤Y
- 总之，对于任意整数Y，可以找到整数x和y使得0<y≤Y，$|x-y\sqrt{D}|<1/Y$
- 此外，随着Y的取值越来越大，我们可以自动得到新的x和y，这是因为对于任意固定的x和y，不等式

$$|x-y\sqrt{D}|<1/Y$$

在Y充分大时是不成立的

狄利克雷定理

0011

- 定理(狄利克雷丢番图逼近定理-版本1)：假设D是一个非完全平方数的正整数，则存在无穷多个正整数对(x,y)使得

$$|x-y\sqrt{D}|<1/y$$

- 例子，D=13时，前面的表中有5个数对满足上述不等式
  – (4,1), (7,2), (11,3), (18,5), (36,10)

狄利克雷定理

0011

- 丢番图逼近论是专门研究用有理数去逼近无理数，在前面的定理中我们可以看到无理数 $\sqrt{D}$ 是由有理数x/y来逼近的

$$\left|\frac{x}{y}-\sqrt{D}\right|<\frac{1}{y^{2}}$$

- 这说明如果y很大，那么x/y非常逼近 $\sqrt{D}$

狄利克雷定理

0011

- 定理(狄利克雷丢番图逼近定理-版本2)：假设$\alpha>0$是一个无理数，即α是一个不能表成分数a/b的实数，则存在无穷多个正整数对(x,y)使得

$$|x-y\alpha|<\frac{1}{y}$$

狄利克雷定理

0011

- 例，假定$\alpha=\sqrt{2}$且n=6，我们发现
  - 在这些数中5倍的分数部分最小

$$|5*\sqrt{2}-7|\approx|7.071-7|=0.071\leq 1/6$$

$$1*\sqrt{2}\approx 1.414$$
$$2*\sqrt{2}\approx 2.828$$
$$3*\sqrt{2}\approx 4.243$$
$$4*\sqrt{2}\approx 5.657$$
$$5*\sqrt{2}\approx 7.071$$
$$6*\sqrt{2}\approx 8.485$$

丢番图逼近与佩尔方程

0011

- 前面我们看到在寻找佩尔方程$x^2-Dy^2=1$的解时，我们期望在使得$|x-y\sqrt{D}|$较小的数对中发现解，因为

$$|x-y\sqrt{D}|=\frac{1}{\left|x+y\sqrt{D}\right|}<\frac{1}{y}$$

连分数

0011

- π=3.141 592 653 589 793 238 462 643…
- 如果我们愿意为了简洁牺牲一点精确性，那么可以写成π=3+“多一点”
- “多一点”是一个介于0和1之间的数
- 当把0.141 592 …倒过来时就变成了一个大于1的数的倒数，于是

$$\pi = 3 + 0.1415926535\cdots$$

$$= 3 + \frac{1}{\dfrac{1}{0.1415926535\cdots}} = 3 + \frac{1}{7.062513305931\cdots} = 3 + \frac{1}{7 + 0.0062513305931\cdots}$$

$$= 3 + \frac{1}{7 + \text{"多一点"}}$$

连分数

- 22/7是π的一个很好的近似
- 重复这个过程，把0.062513305931…倒过来得15.996594406685719888923 0…
- 这样我们得到了关于π的一个双层分数

连分数

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + 0.9965944066\ 85\cdots}}$$

- 用16代替上述的15.996…，我们可以得到π的另一个更好的近似355/113，这个过程还可以继续下去……
- 22/7和355/113等都称为π的收敛项

连分数

0011

- 连分数

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\cfrac{1}{a_5+\cfrac{1}{a_6+\ddots}}}}}}$$

- 为了简洁方便简记为 $[a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots]$

连分数与佩尔方程定理

0011

- 定理：记$\sqrt{D}$ 的连分数为 $\sqrt{D}=[a,\overline{b_1,b_2,\cdots,b_{m-1},b_m}]$ 并令，$\frac{p}{q}=[a,b_1,b_2,\cdots,b_{m-1}]$，则佩尔方程$x^2-Dy^2=1$ 的最小解为

$$(x_1,y_1)=\begin{cases}(p,q) & \text{若m为偶数}\\(p^2+q^2D,2pq) & \text{若m为奇数}\end{cases}$$

其他所有的解均由公式

$$x_k+y_k\sqrt{D}=\left(x_1+y_1\sqrt{D}\right)^k,\qquad k=1,2,3,\ldots$$

给出。