



排列与组合

潘海为

<http://rciip.hrbeu.edu.cn>

圆排列

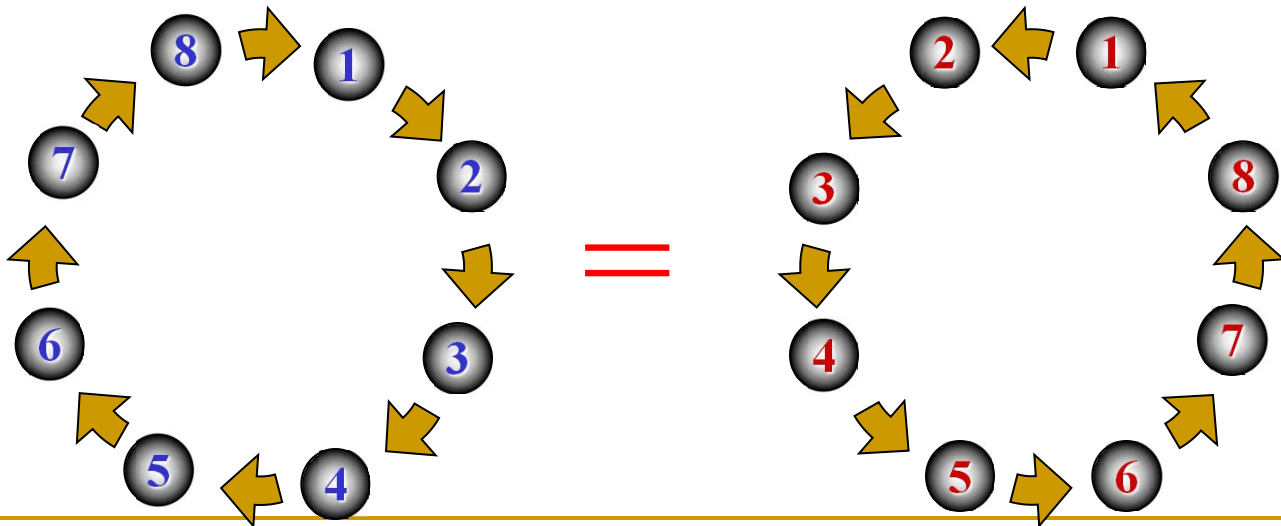
- **例13** 围环形跑道插六面彩旗，其中黄、绿、红、蓝、橙、粉各一面
 - 若红、蓝旗相邻有多少种插旗方式？
 - 若红、蓝旗不相邻有多少种插旗方式？

$$Q(5,5) \cdot P_2^2 = 2 \times 4!$$

$$Q(6,6) - Q(5,5) \cdot P_2^2 = 5! - 2 \times 4!$$

项链排列

- 排列的方法如同项链一般，在圆排列的基础上，逆时针方向和顺时针方向放置各个数是同一个排列



项链排列

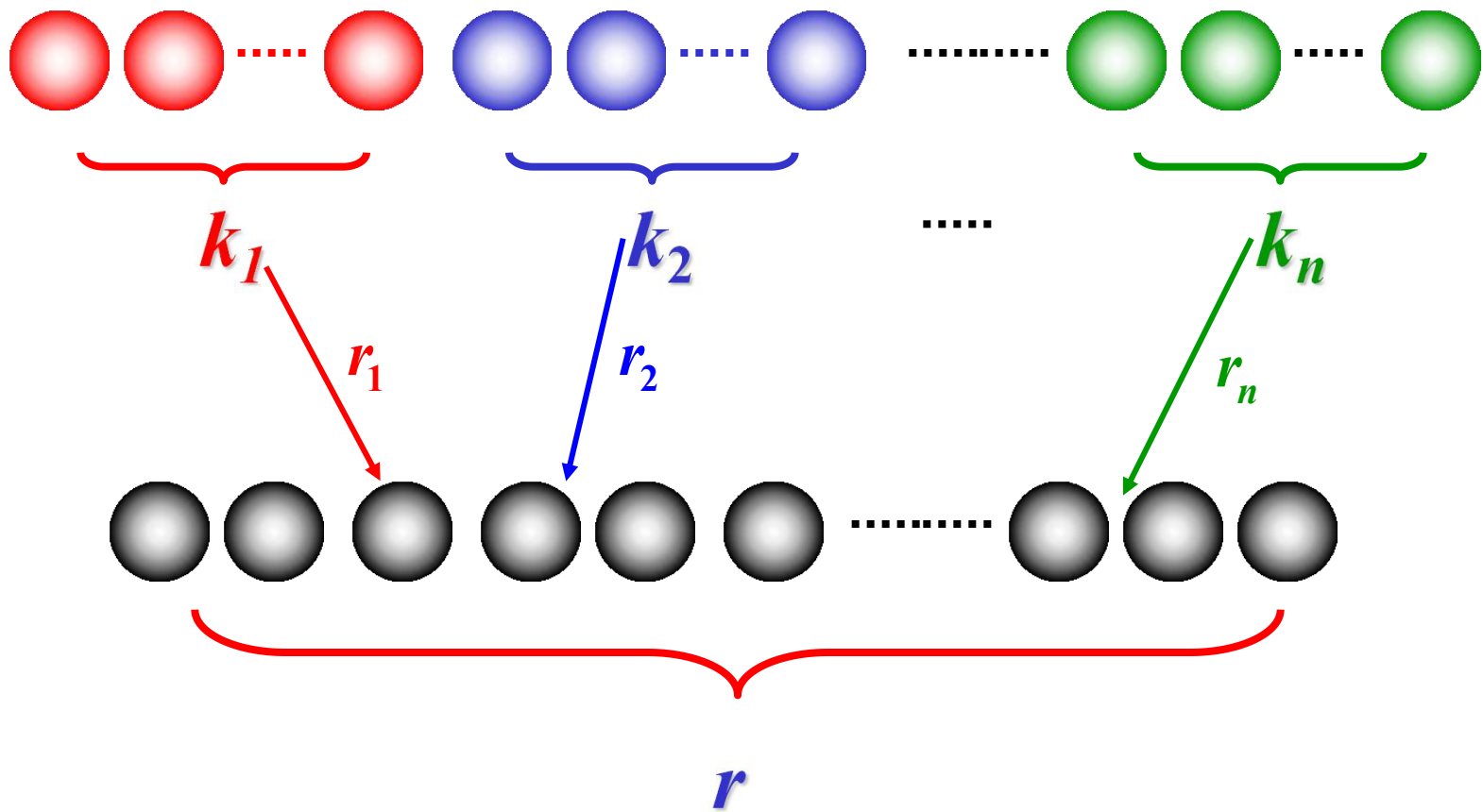
- 排列的方法如同项链一般，在圆排列的基础上，逆时针方向和顺时针方向放置各个数是同一个排列
- 项链排列的排列数为 $Q(n, r) / 2 = P(n, r) / 2r$,
 $2 \leq r \leq n$

可重排列

■ 定义

- 设有 n 种不同的物体 $a_1 \dots a_n$ ，
第一种物体中有 k_1 个相同物体 a_1 ，
第二种物体中有 k_2 个相同物体 a_2 ，
...
第 n 种物体中有 k_n 个相同物体 a_n 。
现从这 n 种物体中取 r 个物体进行排列，
称为 r 可重排列

可重排列



可重排列

■ 分三种情况

□ $r = k_1 + k_2 + \dots + k_n$

□ $k_1 \geq r, k_2 \geq r, \dots, k_n \geq r$

或者 $k_1 = \infty, k_2 = \infty, \dots, k_n = \infty$

□ 存在 $k_i < r$

可放回取样的可重排列

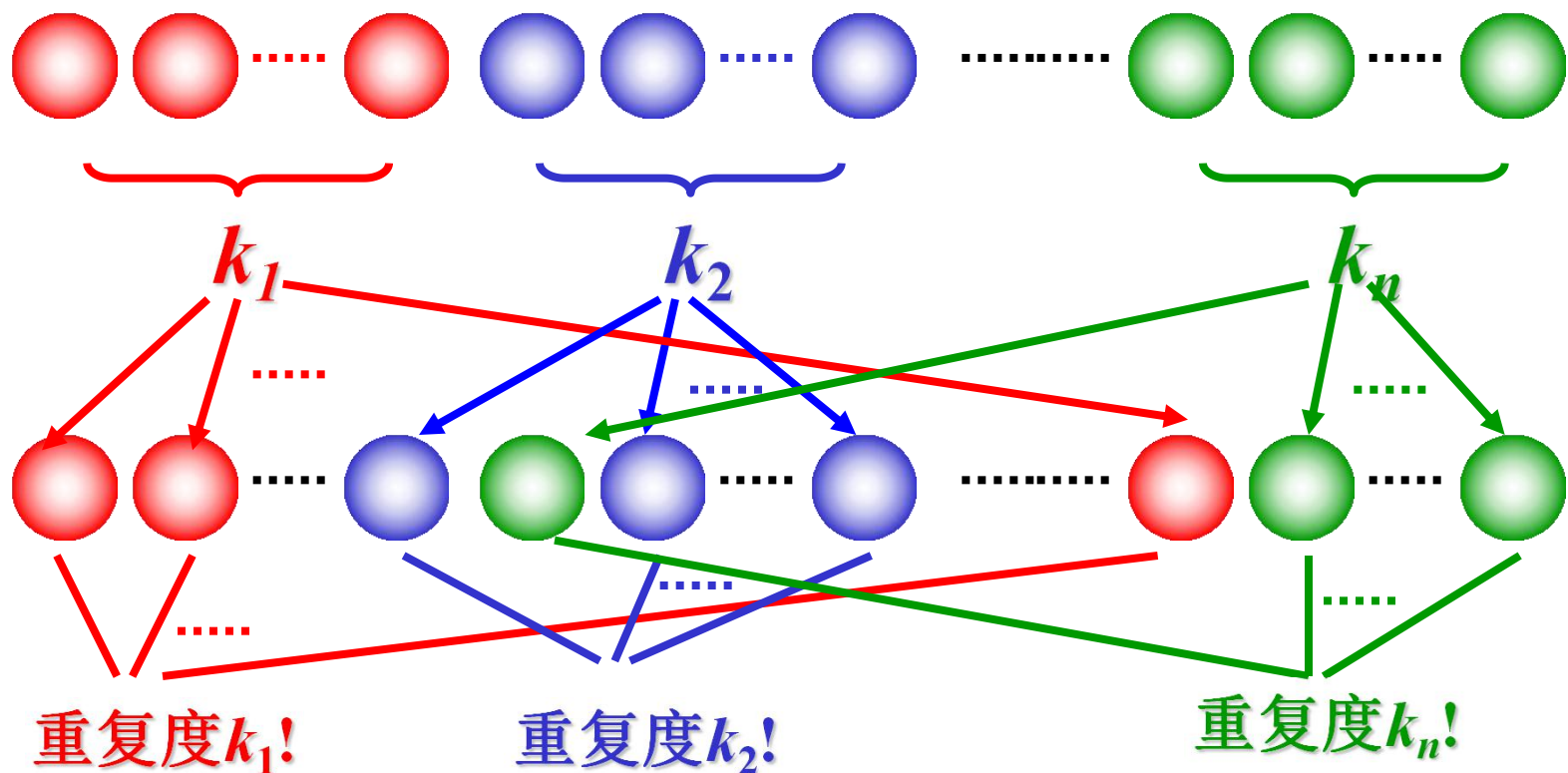
可重排列 $(r = k_1 + k_2 + \dots + k_n)$

■ 设 $S = \{k_1 \cdot a_1, k_2 \cdot a_2, \dots, k_n \cdot a_n\}$,

当 $k_1 + k_2 + \dots + k_n = r$ 时, 从 n 种物体中取 r 个物体的全排列数用 $P(r; k_1, k_2, \dots, k_n)$ 或

$\binom{r}{k_1 k_2 \dots k_n}$ 表示

可重排列 $(r = k_1 + k_2 + \dots + k_n)$



可重排列 $(r = k_1 + k_2 + \dots + k_n)$

- $P(r; k_1, k_2, \dots, k_n) = r! / (k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!)$

- 证明

对 a_1, a_2, \dots, a_n 中的所有物体分别加下标，得到

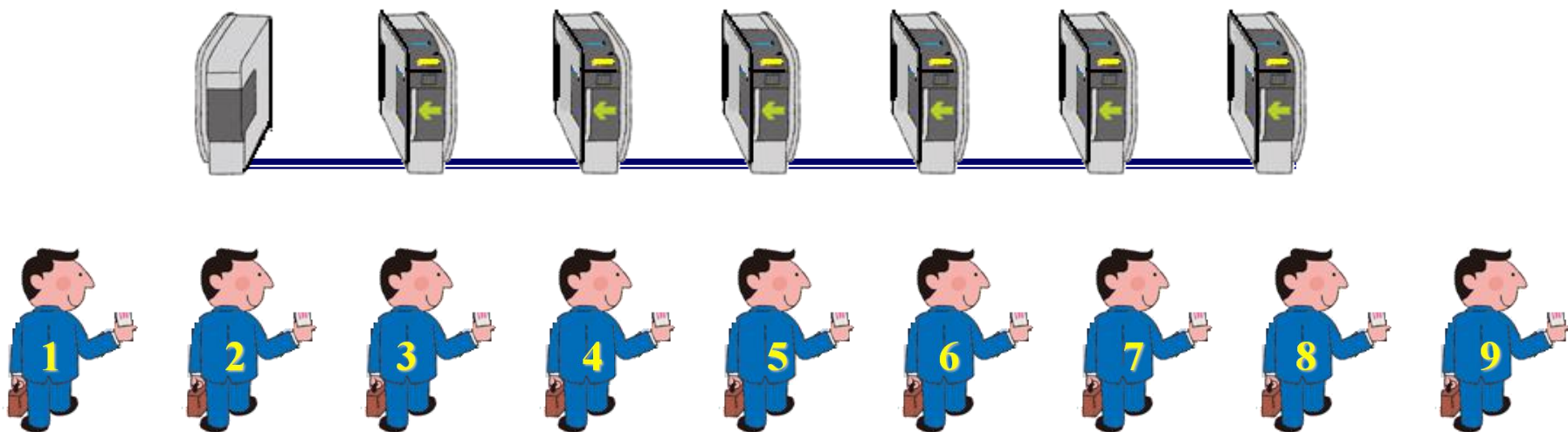
$r!$ 种全排列

但是，由于 k_1 个 a_1, k_2 个 a_2, \dots, k_n 个 a_n 分别相同，使得排列数扩大 $k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!$ 倍

$\therefore P(r; k_1, k_2, \dots, k_n) = r! / (k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!)$

可重排列 $(r = k_1 + k_2 + \dots + k_n)$

- **例14** 某车站有 6 个入口处，每个入口处每次只能进一人，9 个人进站的方案有多少？



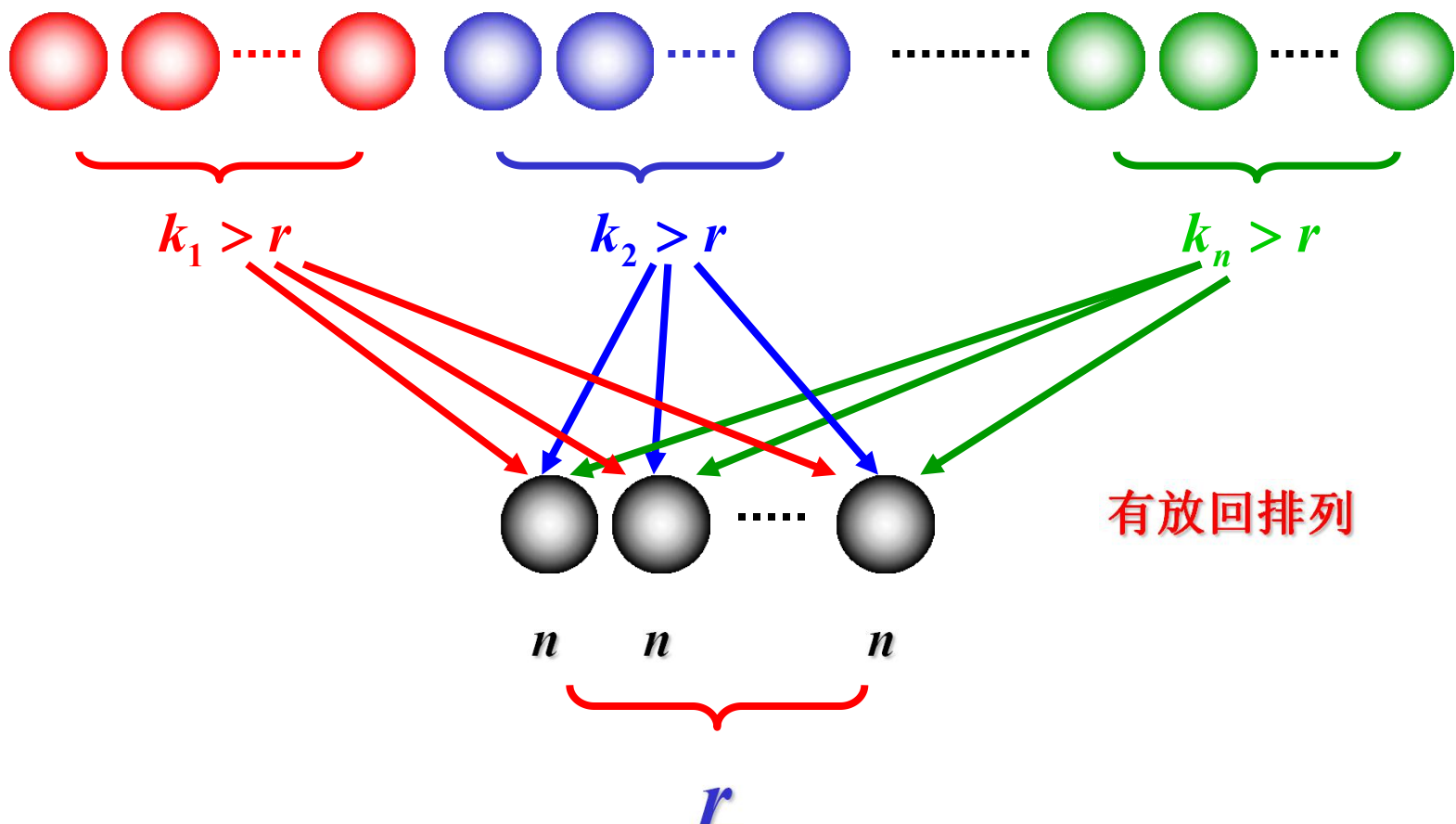
例14



例14

- 方法一： $14! / (5! \cdot 1! \cdot 1! \dots 1!) = 14! / 5!$
- 方法二： $9! * C(14, 5)$
- 方法三： $6 \times 7 \times 8 \times \dots \times 14$

可重排列



可重排列 (k_1, k_2, \dots, k_n 均为 $\geq r$)

$$P(r; a_1 \cdot \infty, a_2 \cdot \infty, \dots, a_n \cdot \infty) = n^r$$

- 当 k_1, k_2, \dots, k_n 均 $\geq r$ 时，现从 n 种物体中取 r 个物体，并依次排列，则其排列数为：

n^r

每取完一个物体，并不改变物体的种类，保持为 n 种



可重排列（存在 $k_i < r$ ）

- 存在 $k_i < r$ 时，排列数是多少？公式是什么？

这个一真没有！

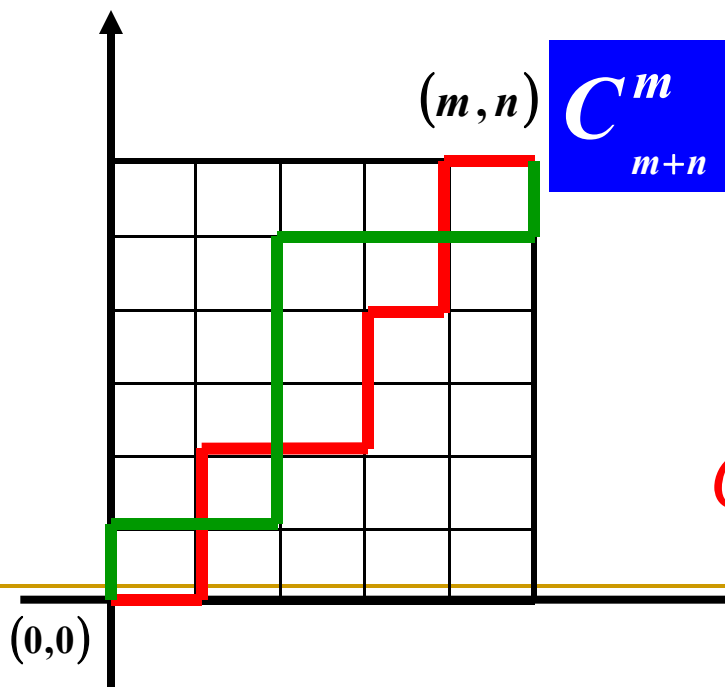
- **例15** 在一个 5 位数中，要求数字 1 出现的次数最多为两次，求有多少个这样的数？

$$8 \times 9^4 + 9^4 + C_4^1 \times 8 \times 9^3 + C_4^1 \times 9^3 + 8 \times C_4^2 \times 9^2$$

可重排列

■ 例16-1 简单格路问题

从 $(0,0)$ 点出发沿 x 轴或 y 轴的正方向每步走一个单位，最终走到 (m,n) 点，有多少条路径？



红色路径: 01100110110

绿色路径: 10011110001

$$C_{m+n}^m = C_{m+n}^n = (m+n)! / (m! \cdot n!)$$