排列与组合

潘海为

http://rciip.hrbeu.edu.cn

加法法则与乘法法则

- 例6 求能除尽1400的正整数的个数（1除外）

4*3*2-1

- 例7 求5位数中至少存在一个6且能被3整除的个数

30000-8*9*9*9*3

加法法则与乘法法则

- **例8** n元布尔函数$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$的数目

$$2^{2^n}$$

- ***课后练习1***
  - 求100!这个整数的末尾有多少个零

24

一一对应法则

- 假设事件 A 的产生方式与事件 B 的产生方式一一对应，则事件 A 产生的方式数与事件 B 产生的方式数相等

- 要对 A 集合计数，但直接计数有困难，于是可设法构造一易于计数的 B ，使得 A 与 B 一一对应

一一对应法则

- **例9** 在 100 名选手中进行淘汰赛，最后产生一名冠军选手，要经过多少场比赛？

99

- 正常思路：
  ① 第1轮要进行50场比赛，留下50名选手；
  ② 第2轮要进行…场比赛，留下…名选手；
  ③ 第n轮要进行…场比赛，留下…名选手；
- 一一对应：

- 在赌马游戏中一共有 8 匹马参加比赛，玩家需要在彩票上添入前三位胜出的马匹的号码
- 共有 336 种可能
- 玩家一次中重奖的概率应该是：

P = 1 / 336 = 0.00298

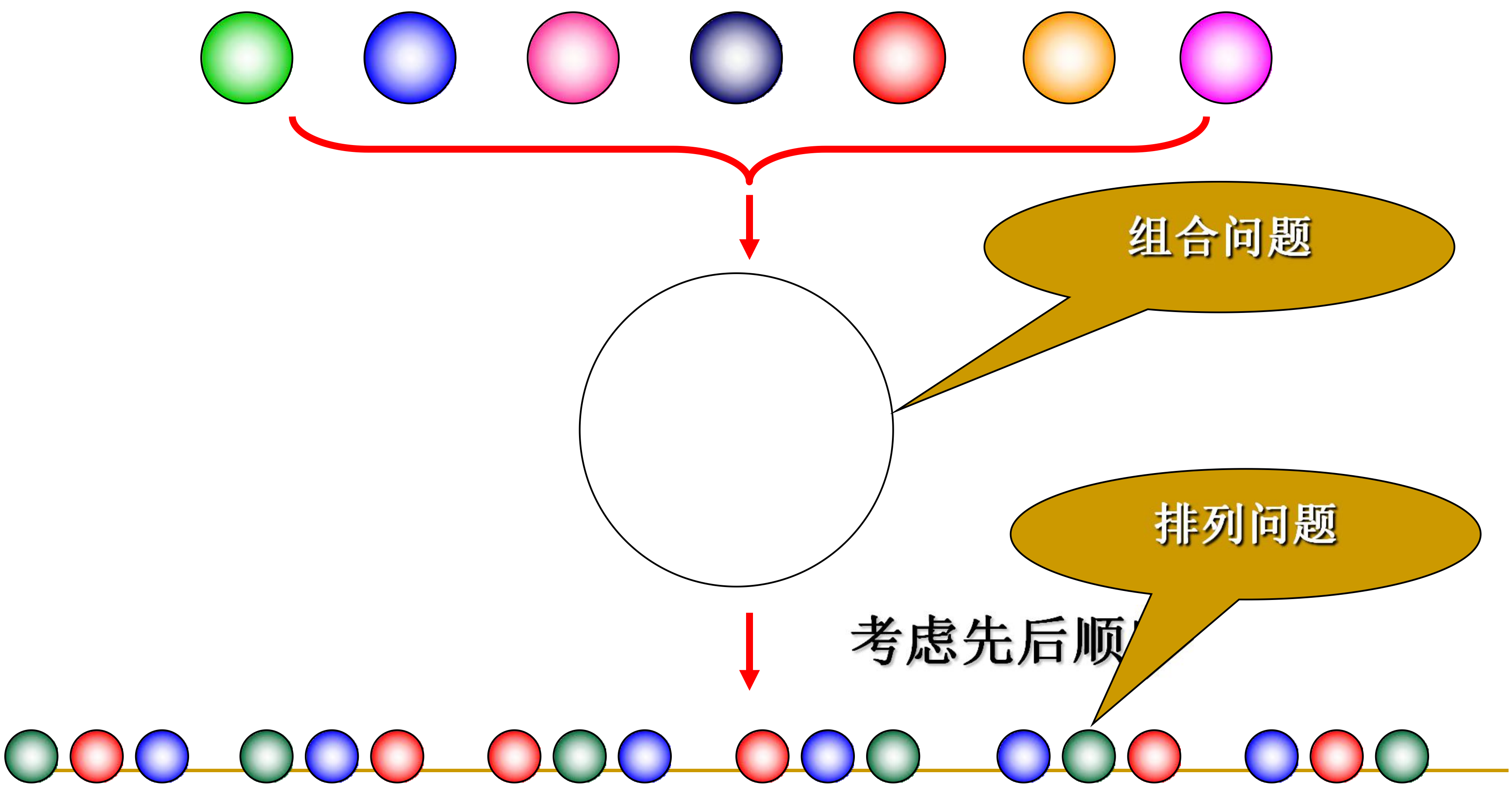
- 六合彩游戏：从 49 个球中取出 6 个进行组合的可能性一共有

$$\binom{49}{6} = 13983816$$

- 如果球摇出来后再放回摇奖机中，这时组合的可能性一共有

$$\binom{49+6-1}{6}$$

排列与组合



排列

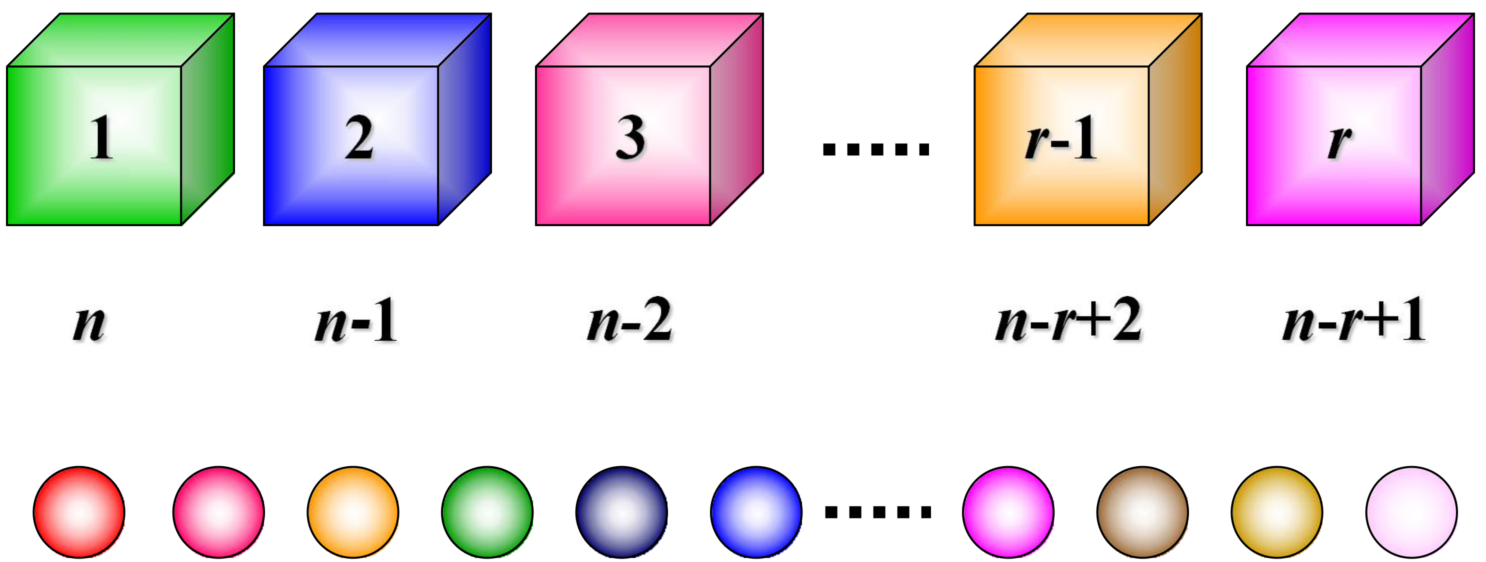
- 定义

  从 n 个不同的元素中，取 r 个不重复的元素，按次序排列，称为从 n 中取 r 个的**排列**

- 排列数记为 $p(n, r)$

排列

- 从 n 个不同的球中, 取出 r 个, 放入 r 个不同的盒子里, 每盒1个



排列

- $P(n, r) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots\ldots (n-r+2)(n-r+1)$

  $= n! / (n - r)!$

- 特别地：

  当 $r = n$ 时，称为全排列，$P(n, n) = n!$

排列

- 例10 从 1, 2, …, 9 中选出不同的 7 个数字组成一个 7 位数，要求 5 和 6 不相邻，问有多少种方法？

P(9,7)-2P(7,5)×6

组合

- 从 n 个不同元素中取 r 个元素，且不考虑顺序，称为从 n 个中取 r 个的组合
- 组合数用 $C(n, r)$ 或 $\binom{n}{r}$ 表示

组合

- 若球不同，盒子相同，则是从 n 个中取 r 个的组合模型
  - 若放入盒子后再将盒子加上标号以示区别，则又回到排列模型，因此，每一个组合对应r !个长度为r的全排列
  - $C(n, r) \cdot r! = P(n, r)$
- $C(n, r) = P(n, r) / r! = n! /[(n - r)! \cdot r!]$

组合

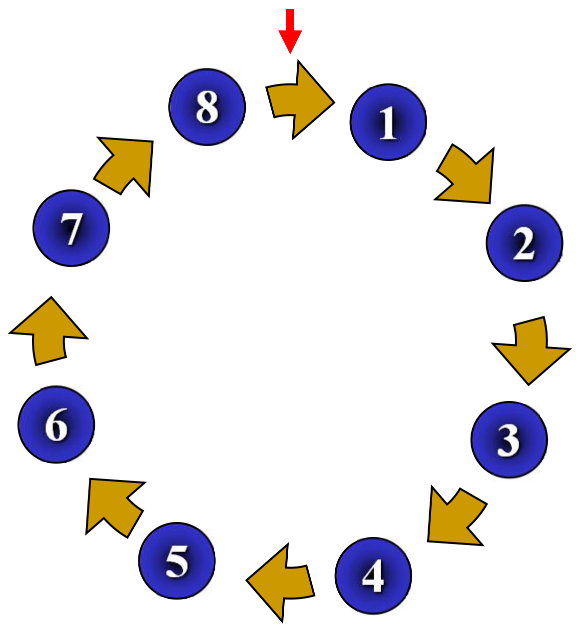
- 例11 从[1 , 300]中取 3 个不同的数，使这 3 个数的和能被 3 整除，问有多少种方案?

$$C_3^1 \times C_{100}^3 + 100^3$$

- 解题思路：
  ① 将1-300分成三个集合，被3整除余0、1、2，形成三个集合A、B、C
  ② 三个数同属于某一个集合，或者分别属于某一个集合

圆排列

- 定义：从 n 个不同的元素中取 r 个元素排列在一个圆环上的排列



12345678 81234567 78123456 67812345 56781234 45678123 34567812 23456781

圆排列

- 排列数用 $Q(n, r)$ 表示
- $Q(n, r) = P(n, r)/r$，**$2 \le r \le n$**
- $Q(n, n) = P(n, \mathrm{n})/\mathrm{n} = (\mathrm{n}-1)!$

- **例12** **4 男 4 女围桌相间而坐，问有多少种不同的就坐方案?**

$$Q(4,4) \times 4! = 3! \times 4! = 144$$