排列与组合

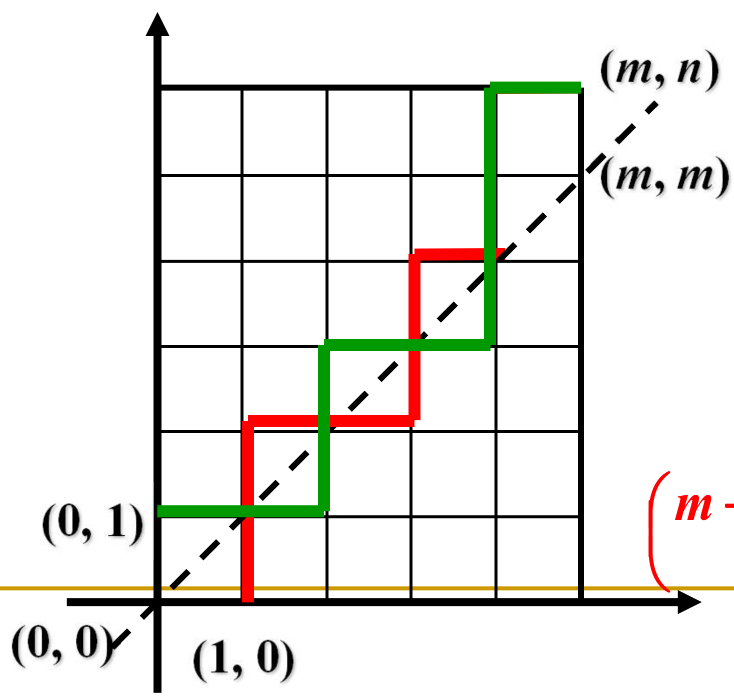
潘海为

http://rciip.hrbeu.edu.cn

可重排列

- **例16-2** 从 (0,0) 点到(m, n) 点，$m < n$要求中间所经过的每一个格子点（a,b）恒满足 $b>a$ 关系，问有多少条路径？

(0,0) 点到(m, n)=(0,1) 点到(m, n)+ ~~(1,0) 点到(m, n)~~



从(0,1) 点到(m, n)不满足要求的路径数=从(1,0) 点到(m, n)的路径数

满足要求的从(0,0) 点到(m, n)的路径数=
从(0,1) 点到(m, n)的路径数 -
从(1,0) 点到(m, n)的路径数

$$\binom{m+n-1}{m}-\binom{m-1+n}{m-1}=\binom{m+n-1}{m}-\binom{m+n-1}{m-1}$$

可重组合

- 有 n 种不同的物件，$S = \{k_1 \cdot a_1, k_2 \cdot a_2, \ldots k_n \cdot a_n\}$，从这 n 种物体中取出 r 个物件的组合，称为 r 可重组合

可重组合

- 两种特殊情况
  - $k_i \geq r$ (i=1,…,n)
  - a_1， a_2， …， a_n至少出现一次的 r 组合

可重组合

$$C(r;a_1\cdot\infty,a_2\cdot\infty,\cdots a_n\cdot\infty)=\binom{n+r-1}{r}$$

- 情况1: 当 $k_i \geq r$ (i=1,…,n)，其可重组合数为 $\binom{n+r-1}{r}$
- 证明
  - 第1步：问题相当于r个相同的球放入n个互异的盒子，每盒球的数目可以不同，求总的方案数
  - 第2步：上述问题又可转换为r个相同的球与n-1个相同的盒壁的排列问题
  - 排列数为

$$(r+n-1)!/(r!\cdot(n-1)!)=\binom{n+r-1}{r}$$

可重组合

- **例17** 已知线性方程$x_1+x_2+\ldots+x_n=b$, n和b都是整数，$n\geq1$，求此方程的非负整数解的个数

$$\binom{n+b-1}{b}$$

- **例18** 设某个餐厅有 7 种不同的菜，某顾客要买 4 个菜，问有多少种买法？

$$\binom{7+4-1}{4}=\binom{10}{4}=210$$

可重组合

- 情况2：a_1，a_2，…，a_n至少出现一次的 r 组合的组合数为 $\binom{r-1}{r-n}$
- 证明
  - 因为a_1，a_2，…，a_n至少出现一次，所以，先取出a_1，a_2，…，a_n各一个，剩下的问题就转化为从n中取r-n个的可放回组合问题
  - 组合数为 $\binom{r-n+n-1}{r-n}=\binom{r-1}{r-n}=\binom{r-1}{n-1}$

不相邻组合

- 定理：是指从 $A=\{1, 2, \ldots, n\}$取 r 个不相邻的数的组合，即不存在相邻两个数 j 和 $j+1$的组合，其组合数为 $\binom{n-r+1}{r}$

Stirling 近似公式

- 组合计数的渐进值问题是组合论的一个研究方向
- Stirling 公式给出一个求 $n!$ 的近似公式，它对从事计算和理论分析都是有意义的

$$n! \sim \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Pascal公式

- 对于满足1≤*k*≤*n*-1的所有整数*k*和*n*

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$$

- 证法1：直接计算方法（略）

Pascal公式

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$$

- 证法2
  - 令*S*是*n*个元素的集合
  - 任取一个元素用*x*表示
  - S的*k*-组合的集合可划分为不包含*x*的*k*-组合和包含*x*的*k*-组合
  - 则

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$$

二项式定理及二项式系数

- 设 n 是正整数，对任意 x, y 有

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

二项式系数

- 证法一：数学归纳法

二项式定理及二项式系数

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$$

- 证法二：
  - $(x+y)^n=(x+y)\cdot(x+y)\cdot\ldots\cdot(x+y)$
  - n 个 $x+y$ 相乘，每个 $x+y$ 在相乘时有两种选择， x 或 y
  - 由乘法法则可知，乘积中共有 2^n 项，并且每一项都可以写成$x^k y^{n-k}$的形式。 $k = 0, 1, \ldots, n$
  - 对于项$x^k y^{n-k}$，是在 k 个 $x+y$ 中选择了x，其余 $n-k$ 个$x+y$ 选择了 y 而得到的，从 n 个 $x+y$ 中选取 k 个选择 x 的选法数为 $C(n,k)$，所以该项系数为$C(n,k)$
  - 定理得证

二项式定理及二项式系数

- 推论1

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\cdots+\binom{n}{n}x^n$$

二项式定理 y=1

- 推论2

$$(1-x)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^k=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}x+\cdots+\binom{n}{n}(-1)^n x^n$$

推论1 x = -x

二项式定理及二项式系数

- **推论3**

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$$

n元集合的所有子集个数是2^n

- **推论4**

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$$

n 元集合的偶子集个数与奇子集个数相等

二项式定理及二项式系数

- 例19 在$(3a-2b)^{18}$的展开式中
  - 求a^5b^{13}的系数
  - 求a^8b^9的系数
- 例20 证明 $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k = 3^n$
- 例21 海为今天问各位再过10^{100}天是星期几？

$\binom{18}{5}\cdot 3^5\cdot(-2)^{13}$

0

二项式定理：$x=2, y=1$

星期?